DETERMINISZTIKUS ÉS VALÓSZÍNŰSÉGI ELOSZTÁSI ELJÁRÁSOK[1]

TASNÁDI ATTILA

Az életben számtalan olyan esettel találkozunk, amikor egy jószág iránti kereslet meghaladja a rendelkezésre álló kínálatot. Példaként említhetjük a kárpótlási igényeket, egy csődbement cég hitelezőinek igényeit, valamely szerv átültetésére váró betegek sorát stb. Ilyen helyzetekben valamilyen eljárás szerint oszthatjuk el a szűkös mennyiséget a szereplők között. Szokás megkülönböztetni a determinisztikus és a sztochasztikus elosztási eljárásokat, jóllehet sok esetben csak a determinisztikus eljárásokat alkalmazzák. Azonban igazságossági szempontból gyakran használnak sztochasztikus elosztási eljárásokat is, mint például tette azt az Egyesült Államok hadserege a második világháború végét követően a külföldön állomásozó katonáinak visszavonásakor, illetve a vietnami háború során behívandó személyek kiválasztásakor.

Egy korábbi cikkben [6] egy determinisztikus elosztási eljáráshoz hozzárendeltük azokat a sztochasztikus elosztási eljárásokat, amelyek várható értékben azonos elosztást eredményeznek az adott determinisztikus eljárással. Ezek közül kitüntetettek azok a sztochasztikus elosztási eljárások, amelyek személyenként a legkisebb szórású elosztással járnak. Ilyen eljárások létezése biztosított [6, 1. tétel]. Ez az adott determinisztikus elosztási eljáráshoz társított minimális varianciájú eljárás. Mind a determinisztikus, mind a sztochasztikus elosztási eljárásokat szokás igazságossági, invariancia és más típusú tulajdonságokkal jellemezni. Például egy természetes igazságossági követelmény sztochasztikus elosztási eljárásokkal szemben, hogy az elosztás várható értékben igény arányos legyen.

Az igények és az elosztandó mennyiségek egészértékűsége mellett megvizsgáljuk, hogy melyek azok a nevezetes tulajdonságok, amelyek egy determinisztikus elosztási eljárásról szükségszerűen „átöröklődnek” a hozzárendelt minimális varianciájú elosztási eljárásokra. Ehhez előbb az 1. szakaszban definiáljuk az elosztási problémát, a determinisztikus elosztási eljárásokat és számos nevezetes tulajdonságot. Majd a 2. szakaszban tárgyaljuk a sztochasztikus elosztási eljárásokat és 1. szakaszban bevezetett tulajdonságok sztochasztikus megfelelőit. Ezek után a 3. szakaszban megvizsgáljuk, hogy egy determinisztikus elosztási eljárás mely tulajdonságai öröklődnek át a hozzája rendelt minimális varianciájú elosztási eljárásokra. Végül a 4. szakaszban röviden összefoglaljuk az elért eredményeket.

[1] A kutatást az OTKA (F043496) támogatta. Beérkezett: 2004. szeptember 26. e-mail: `attila.tasnadi@math.bke.hu`.

1 Determinisztikus modellkeret

Jelölje $I\!N$ a nem negatív egész számok, $I\!R_+$ a nem negatív valós számok halmazát és legyen $\mathcal{N}$ a lehetséges szereplők egy véges halmaza. Egy elemű halmazok esetén sokszor elhagyjuk majd a halmazt jelölő kapcsos zárójeleket, így például $\{i\}$ helyett általában csak egyszerűen i-t írunk, ahol ez nem vezet félreértéshez. Vektorok koordinátáit alsó indexszel jelöljük. Tetszőleges $N \subset \mathcal{N}$, $x \in I\!R^N$ és $M \subset N$ esetén vezessük be az $x_M = \sum_{i \in M} x_i$ és $x^M = (x_i)_{i \in M}$ jelöléseket. Legyen továbbá $\left(x^M, x^{N \setminus M}\right) = x$.

Egy *elosztási probléma* az $\left(N, t, (x_i)_{i \in N}\right)$ hármassal írható le, ahol $N \subset \mathcal{N}$ a szereplők halmaza, $t \in I\!N$ az N-beli szereplők részére elosztandó mennyiség és $x_i \in I\!N$ az $i \in N$ szereplő igénye.[2] Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_N > t$, mivel ellenkező esetben mindenki megkaphatja az általa igényelt teljes mennyiséget.

Egy r *determinisztikus elosztási eljárás* bármely $\left(N, t, (x_i)_{i \in N}\right)$ elosztási problémához hozzárendel egy $y \in I\!R_+^N$ elosztást, melyre $y_N = t$ és $0 \le y_i \le x_i$ minden $i \in N$-re. Ekkor azt írjuk, hogy $r(N, t, x) = y$.

1.1 Axiómák

A következőkben a determinisztikus elosztási eljárások hét nevezetes tulajdonságát vesszük sorra. Jogos elvárás, hogy egy szereplő igényének megnövekedése, a többiek igényének változatlansága mellett, ne vezessen a megnövekedett igényű szereplő részesedésének csökkenéséhez. Ez az úgynevezett kereslet-monotonitás.

1.1 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás* kereslet-monoton*, ha*

$$x^i \le \hat{x}^i \Rightarrow r^i\left(N, t, \left(x^i, x^{N \setminus i}\right)\right) \le r^i\left(N, t, \left(\hat{x}^i, x^{N \setminus i}\right)\right)$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i \in N$, $t, x^i, \hat{x}^i \in I\!N$ és $x^{N \setminus i} \in I\!N^{N \setminus i}$ esetén.

A kereslet-monotonitással valamelyest analóg a kínálat-monotonitás, amely szerint a kínálat növekedésével senkinek sem csökkenhet a részesedése.

1.2 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás* kínálat-monoton*, ha*

$$t \le t' \Rightarrow r^i(N, t, x) \le r^i(N, t', x)$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i \in N$, $t, t' \in I\!N$ és $x \in I\!N^N$ esetén.

Természetes igazságossági követelmény, hogy az azonos igényű szereplők azonos mennyiségekben részesüljenek.

1.3 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás kielégíti az* egyenlő elbánás elvét*, ha*

$$x^i = x^j \Rightarrow r^i(N, t, x) = r^j(N, t, x)$$

[2] Itt úgynevezett diszkrét elosztási problémákra szorítkozunk.

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i, j \in N$, $t \in I\!N$ *és* $x \in I\!N^N$ *esetén.*

A következő négy strukturális tulajdonság interpretációja nem olyan természetes, és megkövetelésük nem is minden helyzetben indokolt. A konzisztencia szerint az elosztási eljárásnak, a szereplők igényteljesítési sorrendjétől függetlenül, ugyanazt az elosztást kell eredményeznie.

1.4 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás* konzisztens*, ha*

$$r^i(N, t, x) = r^i\left(N \setminus j, t - r^j(N, t, x), x^{N \setminus j}\right)$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i, j \in N$, $i \neq j$, $t \in I\!N$ *és* $x \in I\!N^N$ *esetén.*

A konzisztencia megkövetelése indokolt lehet olyan helyzetekben, amelyekben a szereplők folyamatosan jelentik be igényeiket és az igényeik teljesítése is folyamatosan történik. Érdekes példa a konzisztencia természetes megkövetelésére egy parlament mandátumainak területi egységenkénti elosztása. Ennek jobb megértése céljából gondoljunk arra, hogy az Egyesült Államokhoz az elmúlt évszázadokban folyamatosan csatlakoztak újabb és újabb államok. Az egyes államok képviselőhelyeinek száma nem függhetett az államok belépési sorrendjétől.[3] Hasonló helyzet állhat elő az Európai Unió országainak Uniós parlamentbeli mandátumainak számításakor, hiszen a jövőben is számíthatunk újabb tagfelvételekre.

A következő tulajdonság megköveteli, hogy azonos eredményre vezessen a kínálat két lépésben történő elosztása és a kínálat egy lépésben történő elosztása. A két lépésben történő elosztás alatt az értendő, hogy az első lépésben szétosztunk egy adott mennyiséget, majd a második lépésben pótlólagosan egy további mennyiséget pusztán a fennmaradó igények ismeretében.

1.5 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás* alulról előállítható*, ha*

$$0 \leq t' \leq t \leq x_N \Rightarrow r(N, t, x) = r(N, t', x) + r(N, t - t', x - r(N, t', x))$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, *minden* $t, t' \in I\!N$ *és minden* $x \in I\!N^N$ *esetén.*

Az alulról előállíthatóság azt jelenti, hogy a pótlólagos mennyiségek elosztása során, a múltat figyelmen kívül hagyva is, ugyanahhoz az elosztáshoz jutunk. Továbbá, ha a szétosztás párhuzamosan történik —például több telephelyen keresztül—, akkor az egymástól függetlenül működő egységek, mind ugyanazon elosztási eljárással dolgozva, pusztán a fennmaradó igényekre vonatkozó információ folyamatos kicserélésével, az igények kielégítésének sorrendjétől függetlenül, ugyanazt az elosztást eredményezik.

Az alulról előállíthatósággal rokon a felülről előállíthatóság, mivel az elosztás két lépésben és egy lépésben történő végrehajtásának egyfajta invarianciáját követeli meg. A felülről előállíthatóság esetében azonban képzeljük el, hogy először túl nagy mennyiséget osztottunk szét és a valójában rendelkezésre nem álló kínálatot utólag kell visszavonnunk a már elosztott mennyiségek ismeretében.

[3] Erre vonatkozóan részletesebben olvashatunk Balinski és Young [1], illetve Young [10] könyveiben.

1.6 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás* felülről előállítható*, ha*

$$0 \leq t \leq t' \leq x_N \Rightarrow r\left(N,t,x\right) = r\left(N,t,r\left(N,t',x\right)\right)$$

minden $N \subset \mathcal{N}$*,* $t, t' \in \mathbb{N}$ *és* $x \in \mathbb{N}^N$ *esetén.*

Az utolsó tulajdonság, amellyel foglalkozni kívánunk az öndualitás tulajdonsága. Ennek teljesülése azt jelenti, hogy az adott eljárás alkalmazása ugyanarra az eredményre vezet, ha a rendelkezésre álló mennyiséget osztjuk szét vagy pedig a hiányt (túlkeresletet) vonjuk le a szereplők igényeiből.

1.7 axióma. *Az r determinisztikus elosztási eljárás kielégíti az* öndualitás *tulajdonságát, ha*

$$r(N,t,x) = x - r(N, x_N - t, x)$$

minden $N \subset \mathcal{N}$*,* $t \in \mathbb{N}$ *és* $x \in \mathbb{N}^N$ *esetén.*

1.2 Nevezetes determinisztikus eljárások

Elemzésünk során négy nevezetes determinisztikus eljárásra lesz szükségünk. Először három valós értékű eljárás leírásával kezdünk. Talán az egyik legnevezetesebb determinisztikus elosztási eljárás az úgynevezett *arányos elosztási eljárás* (proportional method), mely szerint a kínálatból mindenki keresletével arányosan részesül. Formálisan

$$pro(N,t,x) = \frac{t}{x_N}x,$$

ha $x_N > 0$. Megjegyzendő, hogy bármely elosztási eljárás esetén $x_N = 0$-ból szükségszerűen $r(N,t,x) = 0$ következik. Az arányos elosztási eljárás számos érdekes jellemzése megtalálható többek között Moulin [3] áttekintő munkájában. Az arányos elosztási eljárás két érdekes és az általunk ismertetett tulajdonságok segítségével is érthető jellemzését adta Young [9], amely szerint az arányos elosztási eljárás az egyetlen alulról előállítható és önduális, illetve az egyetlen felülről előállítható és önduális elosztási eljárás.

Az arányosság elvével szemben az egyenlőség elve áll, amelyet leginkább az úgynevezett *egyenletes nyereség eljárás* (uniform gains method) testesít meg. Az egyenletes nyereség eljárás azonos λ mennyiséget juttat azoknak a szereplőknek, akiknek igényei elérik a λ értéket, míg a λ értéknél kisebb igényű szereplőket maradéktalanul kielégíti. Formálisan

$$ug_i(N,t,x) = \min\{\lambda, x_i\},$$

ahol a λ értéke a $\sum_{i \in N} \min\{\lambda, x_i\} = t$ egyenlőség által meghatározott.

Az *egyenletes veszteség eljárás* (uniform losses methods) akárcsak az előző eljárás az egyenlőség elvére épít, azonban a kielégítetlen igényeket igyekszik egyenlően szétteríteni. Formálisan

$$ul_i(N,t,x) = \max\{x_i - \mu, 0\},$$

ahol $\sum_{i \in N} \max\{x_i - \mu, 0\} = t$.

Moulin [2] megmutatta, hogy *pro*-n kívül még pontosan az *ug* és *ul* eljárások azok, amelyek egyszerre konzisztensek, alulról előállíthatóak, felülről előállíthatók, skála invariánsak[4] és teljesítik az egyenlő elbánás elvét.

A negyedik nevezetes elosztási eljárás a *prioritási szabály*, amely a szereplőket az igényüktől és a kínálattól független fontossági sorrendbe rendezi, majd az igényeket mindig ezen sorrend szerint elégíti ki. Így egy alacsonyabb fontosságú szereplő csak akkor részesülhet az elosztandó mennyiségből, ha az összes nála fontosabb szereplő igénye maradéktalanul teljesíthető. Már a definíciója alapján látható, hogy a prioritási szabály a korábban definiált három determinisztikus elosztási eljárással ellentétben „igazságtalan". Megjegyzendő még, hogy a prioritási szabály az általunk definiált problémákra egész értékű elosztásokat eredményez.

Moulin [2] determinisztikus elosztási eljárásokat vizsgálva kimutatta, hogy a prioritási szabály tulajdonságai alapján kitűntetett szerepet tölt be, mivel az egyetlen olyan egész értékű elosztási eljárás, amely kielégíti egyszerre az 1.4-1.6. axiómákat. Ez egy meglehetősen negatív eredmény, hiszen a prioritási szabály egy nem igazságos elosztási eljárás.

Az ismertetett négy nevezetes elosztási eljárás érdekesebb jellemzései megtalálhatók Moulin [3] és Thompson [8] áttekintő munkáiban.

2 Valószínűségi modellkeret

A valószínűségi modellkeretben már csak diszkrét elosztásokat engedünk meg. Jelölje $\Omega_{N,t,x}$ a lehetséges *elosztások* halmazát, azaz

$$\Omega_{N,t,x} = \left\{\omega \in I\!N^N \mid \omega_N = t, \forall i \in N : 0 \leq \omega_i \leq x_i\right\},$$

és jelölje $\mathcal{P}\left(\Omega_{N,t,x}\right)$ az $\Omega_{N,t,x}$ halmaz hatványhalmazát.

A ρ valószínűségi *elosztási eljárás* minden egyes $\left(N, t, (x_i)_{i \in N}\right)$ elosztási problémához hozzárendel egy az $\left(\Omega_{N,t,x}, \mathcal{P}\left(\Omega_{N,t,x}\right)\right)$ téren értelmezett valószínűségi mértéket, amelyet $\rho_{N,t,x}$-szel jelölünk. Továbbá jelölje ekkor $\rho^i_{N,t,x}$ az $i \in N$ szereplőnek jutatott mennyiség eloszlását, amely a $\rho_{N,t,x}$ megfelelő peremeloszlása.

Vegyük sorra a determinisztikus modellkeretben tárgyalt hét tulajdonság kiterjesztéseit. Ehhez először is szükségünk lesz a sztochasztikus dominancia relációra. Azt mondjuk, hogy a $(\{0, 1, \ldots, n\}, \mathcal{P}(\{0, 1, \ldots, n\}))$ téren értelmezett μ és ν valószínűségi mértékek közül ν *sztochasztikusan dominálja*[5] μ-t, ha

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\} : \mu\left(\{k, k+1, \ldots, n\}\right) \leq \nu\left(\{k, k+1, \ldots, n\}\right).$$

[4] A skála invariancia szerint az elosztás nem függhet attól, hogy milyen mértékegységben mérjük a mennyiségeket.

[5] Ez a fajta sztochasztikus dominancia elsőrendű sztochasztikus dominancia néven ismeretes.

A sztochasztikus dominancia reláció jelölésére a $\preceq$ szimbólumot használjuk. Tehát $\mu \preceq \nu$ azt jelöli, hogy ν sztochasztikusan dominálja μ-t. Ellenőrizhető, hogy $\preceq$ egy parciális rendezés.

A kereslet-monotonitás kiterjesztése szerint, ha egy elosztási problémában egy személy igénye növekszik —a többiek igényének változatlansága mellett—, akkor bármely mennyiségnél nem kisebb mennyiségekhez legalább ugyanakkora valószínűséggel kell jutnia, mint igényének megnövekedése előtt.

2.1 axióma. *A ρ sztochasztikus elosztási eljárás* kereslet-monoton*, ha*

$$x^i \leq \hat{x}^i \Rightarrow \rho^i_{N,t,\left(x^i,x^{N\setminus i}\right)} \preceq \rho^i_{N,t,\left(\hat{x}^i,x^{N\setminus i}\right)}$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i \in N$, $t, x^i, \hat{x}^i \in I\!N$ és $x^{N\setminus i} \in I\!N^{N\setminus i}$ esetén.

Egy sztochasztikus elosztási eljárás *determinisztikus*, ha minden $\left(N, t, (x_i)_{i\in N}\right)$ elosztási probléma esetén létezik egy olyan $\omega \in \Omega_{N,t,x}$, hogy $\rho_{N,t,x}(\omega) = 1$. Ennek alapján a 2.1 axióma az 1.1 axióma kiterjesztése.

A kereslet-monotonitáshoz hasonló módon kiterjeszthető a kínálat-monotonitás is.

2.2 axióma. *A ρ sztochasztikus elosztási eljárás* kínálat-monoton*, ha*

$$t \leq t' \Rightarrow \rho^i_{N,t,x} \preceq \rho^i_{N,t',x}$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i \in N$, $t, t' \in I\!N$ és $x \in I\!N^N$ esetén.

Az egyenlő elbánás elvének kiterjesztése szerint két azonos igényű személy azonos eloszlások szerint részesül a szűkös mennyiségből.

2.3 axióma. *A ρ sztochasztikus elosztási eljárás kielégíti az* egyenlő elbánás elvét*, ha*

$$x^i = x^j \Rightarrow \rho^i_{N,t,x} = \rho^j_{N,t,x}$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i, j \in N$, $t \in I\!N$ és $x \in I\!N^N$ esetén.

A 2.2-2.3 axiómák nyilván rendre az 1.2-1.3 axiómák kiterjesztései. Térjünk most rá a négy strukturális invariancia tulajdonság kiterjesztéseire.

2.4 axióma. *Konzisztencia:*

$$\rho^i_{N,t,x}(\omega_i) = \sum_{k=0}^{\min\{x_j, t-\omega_i\}} \rho^i_{N\setminus j,t-k,x^{N\setminus j}}(\omega_i)\, \rho^j_{N,t,x}(k)$$

teljesüljön minden $N \subset \mathcal{N}$, $i, j \in N$, $i \neq j$, $t \in I\!N$, $x \in I\!N^N$ és $\omega_i \in \{0, 1, \ldots, \min\{x_i, t\}\}$ esetén.

A következő lemma biztosítja, hogy a 2.4 axióma valóban az 1.4 axióma egy kiterjesztése.

2.1 lemma. *Ha ρ determinisztikus és konzisztens, akkor a vele ekvivalens r determinisztikus elosztási eljárás is konzisztens.*

Bizonyítás. Mivel ρ determinisztikus, $\rho_{N,t,x}(\omega) = 1$ valamely $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ mellett. Ezért $\rho^i_{N,t,x}(\omega_i) = 1$ $\left(\text{azaz } r^i(N,t,x) = \omega_i\right)$, $\rho^j_{N,t,x}(k) = 0$ minden $k \in \{0,1,\ldots,x_j\} \setminus \{\omega_j\}$-ra és $\rho^j_{N,t,x}(\omega_j) = 1$ $\left(\text{azaz } r^j(N,t,x) = \omega_j\right)$. Felhasználva ρ konzisztenciáját $\rho^i_{N\setminus j,t-\omega_j,x^{N\setminus j}}(\omega_i) = 1$ adódik. Ezek alapján

$$r^i(N,t,x) = \omega_i = r^i\left(N \setminus j, t - \omega_j, x^{N\setminus j}\right) = r^i\left(N \setminus j, t - r^j(N,t,x), x^{N\setminus j}\right)$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $i \neq j \in N$, $t \in I\!N$ és $x \in I\!N^N$ esetén. Tehát r konzisztens. ∎

Most nézzük az alulról előállíthatóság kiterjesztését.

2.5 axióma. *Alulról előállíthatóság:*

$$0 \le t' \le t \le x_N \Rightarrow \rho_{N,t,x}(\omega) = \sum_{\substack{\omega' \in \Omega_{N,t',x} \\ \omega' \le \omega}} \rho_{N,t',x}(\omega')\, \rho_{N,t-t',x-\omega'}(\omega - \omega')$$

teljesüljön minden $N \subset \mathcal{N}$, $t, t' \in I\!N$, $x \in I\!N^N$ *és* $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ *esetén.*

Meg kell mutatnunk, hogy a sztochasztikus elosztási eljárásokra most megfogalmazott alulról előállíthatóság valóban az alulról előállíthatóság egy kiterjesztése.

2.2 lemma. *Ha ρ determinisztikus és alulról előállítható, akkor a ρ-val ekvivalens r determinisztikus elosztási eljárás alulról előállítható.*

Bizonyítás. Mivel ρ determinisztikus, ezért léteznek olyan $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ és $\omega' \in \Omega_{N,t',x}$ elosztások, amelyekre $\rho_{N,t,x}(\omega) = 1$ és $\rho_{N,t',x}(\omega') = 1$. Tehát $r(N,t,x) = \omega$ és $r(N,t',x) = \omega'$. Ezért a 2.5 axióma összegének csak egyetlen $\omega' \in \Omega_{N,t',x}$ elosztáshoz tartozó tényezője nem nulla. Erre az ω' elosztásra a 2.5 axiómából adódóan $\omega \ge \omega'$ és $\rho_{N,t-t',x-\omega'}(\omega - \omega') = 1$. Ezért $r(N, t-t', x-\omega') = \omega - \omega'$. Tehát az ω és ω' elosztások ρ által egyértelműen meghatározottak, és így teljesülnek az alábbi egyenlőségek.

$$\begin{aligned} r(N,t,x) &= \omega = \omega' + \omega - \omega' = r(N,t',x) + r(N,t-t',x-\omega') = \\ &= r(N,t',x) + r(N,t-t',x-r(N,t',x)) \end{aligned}$$

minden $N \subset \mathcal{N}$ halmazra, minden $t, t' \in I\!N$ elosztandó mennyiségre és minden olyan $x \in I\!N^N$ igényvektorra, amelyre $0 \le t' \le t \le x_N$ teljesül. ∎

A felülről előállíthatóságot az alábbi módon terjesztjük ki.

2.6 axióma. *Felülről előállíthatóság:*

$$0 \le t \le t' \le x_N \Rightarrow \rho_{N,t,x}(\omega) = \sum_{\substack{\omega' \in \Omega_{N,t',x} \\ \omega \le \omega'}} \rho_{N,t',x}(\omega')\, \rho_{N,t,\omega'}(\omega)$$

teljesüljön minden $N \subset \mathcal{N}$, $t, t' \in I\!N$, $x \in I\!N^N$ *és* $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ *esetén.*

Az alábbi lemma szerint a 2.6 axióma valóban az 1.6 axióma egy kiterjesztése.

2.3 lemma. *Ha ρ determinisztikus és felülről előállítható, akkor a vele ekvivalens r determinisztikus elosztási eljárás felülről előállítható.*

Bizonyítás. ρ determinisztikus volta miatt léteznek olyan $\omega \in \Omega_{N,t,x}$ és $\omega' \in \Omega_{N,t',x}$ elosztások, amelyekre $\rho_{N,t,x}(\omega) = 1$ és $\rho_{N,t',x}(\omega') = 1$. Tehát $r(N,t,x) = \omega$ és $r(N,t',x) = \omega'$. A 2.6 axiómából kifolyólag $\omega \leq \omega'$ és $\rho_{N,t,\omega'}(\omega) = 1$ (azaz $r(N,t,\omega') = \omega$). Ezért

$$r(N,t,x) = \omega = r(N,t,\omega') = r(N,t,r(N,t',x))$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $t \in I\!N$ és $x \in I\!N^N$ esetén. ■

Moulin tétele [2] szerint a prioritási szabály az egyetlen olyan determinisztikus elosztási eljárás, amely kielégíti az 1.4-1.6 axiómákat. A sztochasztikus modellkeretben viszont léteznek a prioritási szabályon kívül további olyan sztochasztikus elosztási eljárások, amelyek egyszerre kielégítik a 2.4-2.6 axiómákat. Ezért a sztochasztikus elosztási eljárásokkal szemben megfogalmazunk egy további igazságossági követelményt, amely szerint a szereplőknek legalább várható értékben az arányos részesedésükhöz kell jutniuk.

2.7 axióma. *Arányos várható részesedés:*

$$\sum_{k=0}^{x_i} k\rho^i_{N,t,x}(k) = x_i \frac{t}{x_N}$$

teljesüljön minden $N \subset \mathcal{N}$, $i \in N$, $t \in I\!N$ és $x \in I\!N^N$ esetén.

A determinisztikus modellkeretben adódó negatív eredmény feloldható, ha az elosztás folyamata során megengedjük a véletlent, azaz az elosztásban résztvevő szereplőknek juttatott mennyiségek valószínűségi változók. A valószínűségi modellkeretben Moulin [4] többféleképpen karakterizálja az úgynevezett arányos elosztási eljárást, amely szerint az elosztandó egységeket úgy sorsoljuk ki a szereplők között egymás után, hogy minden egyes szereplő a fennmaradó igényekkel arányos valószínűségekkel juthat az éppen kisorsolandó egységhez. Az arányos elosztási eljárás —akárcsak a prioritási szabály— konzisztens, alulról előállítható és felülről előállítható.

Moulin [4] megadja a valószínűségi modellkeretben a három invariancia tulajdonságnak (konzisztencia, alulról előállíthatóság és felülről előállíthatóság) egyidejűleg eleget tevő elosztási eljárások halmazát. Lényegében az ezen halmazba tartozó eljárások a szereplőket prioritási osztályokba sorolják és az így adódó prioritási osztályokon belül engedik csak meg a visszatevéses mintavételen alapuló arányos elosztás alkalmazását.[6]

Végül megadjuk az öndualitás kiterjesztését.

[6] A pontosan két szereplőt tartalmazó prioritási osztályokon belül az arányos elosztási eljáráson kívül másfajta elosztási eljárás is megengedhető.

2.8 axióma. *A ρ sztochasztikus elosztási eljárás* önduális, *ha*

$$\rho_{N,t,x} = x - \rho_{N,x_N - t,x}$$

minden $N \subset \mathcal{N}$, $t \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{N}^N$ esetén.

3 Minimális varianciájú elosztási eljárások tulajdonságai

Először a [6]-ban bevezetett minimális varianciájú elosztási eljárások ismertetésével kezdjük. Legyen r egy adott determinisztikus elosztási eljárás. Jelölje $\mathcal{E}(r)$ azon sztochasztikus elosztási eljárások halmazát, amelyek várható értékben r-rel azonos elosztásokat eredményeznek bármely elosztási problémára. Az $\mathcal{E}(r)$ halmazbeli legkisebb varianciaösszegű sztochasztikus elosztási eljárásokat hívjuk az r-hez rendelt *minimális varianciájú elosztási eljárásoknak*. Formálisan, ρ egy r-hez rendelt minimális varianciájú elosztási eljárás, ha bármely elosztási probléma esetén

$$\forall \mu \in \mathcal{E}(r) : \forall i \in N : Var\left(\rho^i_{N,t,x}\right) \leq Var\left(\mu^i_{N,t,x}\right).$$

Jelölje $\mathcal{E}^{mv}(r)$ az r-hez rendelt minimális varianciájú elosztási eljárások halmazát. A [6]-beli 1. tétel alapján minden r elosztási eljáráshoz rendelhető legalább egy minimális varianciájú elosztási eljárás. Továbbá bármely $\mathcal{E}^{mv}(r)$-beli eljárás egy adott (N,t,x) elosztási problémánál az $i \in N$ szereplőnek $y_i^* := \lfloor r_i(N,t,x) \rfloor$, illetve y_i^*+1 mennyiséget juttat $1-r_i(N,t,x)+\lfloor r_i(N,t,x)\rfloor$, illetve $u_i := r_i(N,t,x) - \lfloor r_i(N,t,x) \rfloor$ valószínűséggel. Tehát

$$\rho^i_{N,t,x}\left(y_i^*\right) = 1 - u_i \quad \text{és} \quad \rho^i_{N,t,x}\left(y_i^* + 1\right) = u_i . \tag{1}$$

Most rátérhetünk annak megállapítására, hogy a bevezetett hét determinisztikus tulajdonság közül melyek sztochasztikus kiterjesztéseit őrzik meg a minimális varianciájú elosztási eljárások. Először azokkal a tulajdonságokkal kezdünk, amelyek egy r determinisztikus eljárásról „átöröklődnek” a hozzája rendelt $\mathcal{E}^{mv}(r)$-beli minimális varianciájú elosztási eljárásokra.

Nyilván, ha r kereslet-monoton, akkor (1) alapján bármely $\rho \in \mathcal{E}^{mv}(r)$ is kereslet-monoton, mivel

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,x_i\} : \sum_{l=0}^{k} \rho^i_{N,t,x}(l) \leq \sum_{l=0}^{k} \rho^i_{N,t,\hat{x}}(l)$$

teljesül minden $x_i > \hat{x}_i$ és $x_{N\setminus i} = \hat{x}_{N\setminus i}$ esetén. Hasonlóan igazolható a kínálat-monotonitás öröklődése. Az egyenlő elbánás elvének átöröklődésének teljesülése is nyilvánvaló hiszen, ha r kielégíti az egyenlő elbánás elvét, akkor (1) szerint azonos x_i és x_j igények esetén $y_i^* = y_j^*$ és $u_i = u_j$.

Vegyünk most egy önduális r determinisztikus elosztási eljárást, egy $\rho \in \mathcal{E}^{mv}(r)$ sztochasztikus elosztási eljárást, egy (N,t,x) elosztási problémát, és legyen $i \in N$. Ekkor a $\rho_{N,x_N-t,x}$ elosztás során i a $z_i^* = \lfloor r_i(N, x_N - t, x) \rfloor$ mennyiséghez $s_i = 1 - r_i(N, x_N - t, x) + \lfloor r_i(N, x_N - t, x) \rfloor$ valószínűséggel jut, míg a $z_i^* + 1$ mennyiséghez pedig $1 - s_i$ valószínűséggel. Ha $u_i > 0$, akkor

$$\begin{aligned} x_i - z_i^* &= x_i - \lfloor r_i(N, x_N - t, x) \rfloor = x_i - \lfloor x_i - r_i(N, t, x) \rfloor = \\ &= -\lfloor -r_i(N, t, x) \rfloor = \lfloor r_i(N, t, x) \rfloor + 1 = y_i^* + 1. \end{aligned}$$

Ezért $x_i - (z_i^* + 1) = y_i^*$. Továbbá ha $u_i > 0$, akkor

$$\begin{aligned} \rho_{N,x_N-t,x}(z_i^* + 1) &= 1 - s_i = r_i(N, x_N - t, x) - \lfloor r_i(N, x_N - t, x) \rfloor = \\ &= -r_i(N, t, x) - \lfloor -r_i(N, t, x) \rfloor = \\ &= 1 - (r_i(N, t, x) - \lfloor r_i(N, t, x) \rfloor) = 1 - u_i = \rho_{N,t,x}(y_i^*). \end{aligned}$$

Ebből már $\rho_{N,x_N-t,x}(z_i^*) = \rho_{N,t,x}(y_i^* + 1)$ is következik. Az $u_i = 0$ esetben pedig közvetlenül adódik az öndualitás teljesülése.

Összegezve beláttuk a következő állítást.

3.1 állítás. *Az r kereslet-monotonitása, kínálat-monotonitása, egyenlő elbánás elvének teljesülése és öndualitása öröklődik bármely r-hez rendelt $\rho \in \mathcal{E}^{mv}(r)$ sztochasztikus elosztási eljárásra.*

Sajnos a bevezetett többi három tulajdonság egyike sem öröklődik szükségszerűen egy r determinisztikus elosztási eljárásról egy $\rho \in \mathcal{E}^{mv}(r)$ sztochasztikus elosztási eljárásra. Ezt a negatív eredményt egy-egy ellenpéldán mutatjuk meg.

Az arányos determinisztikus eljáráshoz rendelt minimális varianciájú eljárásokat [6]-ban *igazságos maradék elosztási eljárásoknak* neveztük el. [6]-ban megtalálható ez utóbbi típusú eljárások két jellemzése is. Egy $\mathcal{E}(pro)$-beli eljárás kielégíti a 2.7 axiómát. [2] alapján pro konzisztens, alulról előállítható és felülről előállítható. Belátjuk, hogy egy $\rho \in \mathcal{E}^{mv}(pro)$ sztochasztikus elosztási eljárás sérti a 2.4-2.6 axiómákat. Így ezen tulajdonságok nem öröklődnek pro-ról $\rho \in \mathcal{E}^{mv}(pro)$-ra. Ismeretes [4, 7], hogy egyetlen olyan sztochasztikus elosztási eljárás létezik, amely egyszerre kielégíti a 2.5 és a 2.7 axiómákat, illetve a 2.6 és a 2.7 axiómákat. Ez az úgynevezett arányos valószínűségi elosztási eljárás, amely lényegében egy visszatevés nélküli mintavételen keresztül sorsolja ki a szűkös mennyiséget a keresletükkel megegyező számú sorsjegyekkel ellátott szereplők között.[7] Mivel az arányos valószínűségi eljárás nem eleme $\mathcal{E}^{mv}(pro)$-nak, ezért egy $\mathcal{E}^{mv}(pro)$-beli eljárás semmiképpen sem alulról előállítható, illetve felülről előállítható. Megmutatjuk még, hogy az igazságos maradék elosztási eljárások nem konzisztensek. Ehhez tekintsük a következő példát. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$, $t = 4$ és $x = (1, 2, 3)$. Ez esetben $\rho_{N,t,x}((0, 2, 2)) = 1/3$, $\rho_{N,t,x}((1, 1, 2)) = 2/3$, $\rho_{\{1,3\},3,(1,3)}((0, 3)) = 1/4$, $\rho_{\{1,3\},3,(1,3)}((1, 2)) = 3/4$, $\rho_{\{1,3\},2,(1,3)}((0, 2)) = 1/2$, $\rho_{\{1,3\},2,(1,3)}((1, 1)) = 1/2$, $\rho^2_{N,t,x}(1) = 2/3$ és $\rho^2_{N,t,x}(2) = 1/3$. A konzisztencia sérülését mutatja a $\rho^3_{N,t,x}(2) = 1 \neq \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \rho^2_{N,t,x}(1)\, \rho_{\{1,3\},3,(1,3)}((1, 2)) + \rho^2_{N,t,x}(2)\, \rho_{\{1,3\},2,(1,3)}((0, 2))$ eset.

[7] Az eljárásról részletesebben olvasható [4]-ben, illetve [7]-ben.

A már bevezetett ug-vel és ul-lel jelölt determinisztikus eljárások sztochasztikus megfelelői[8] a fair sorbaállási és a fair sorbaállási* eljárások, amelyek részletes elemzését Moulin és Stong [5] végezte el. A fair sorbaállási eljárás szerint az elosztandó mennyiséget több fordulóban osztjuk el úgy, hogy minden egyes fordulóban a még igényekkel rendelkező szereplőket véletlen sorrendben egy-egy egységhez juttatjuk a még el nem osztott egységekből. A fair sorbaállási* eljárás hasonló módon rendeli a hiányokat a szereplőkhöz. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a fair sorbaállási eljárás egy ug-hez rendelt, míg a fair sorbaállási* eljárás egy ul-hez rendelt minimális varianciájú eljárás. Moulin és Stong [5] két sztochasztikus elosztási eljárása alapján példákat találtunk olyan esetekre, amelyekben a konzisztencia és felülről előállíthatóság, illetve a konzisztencia és alulról előállíthatóság öröklődik.

Végül nézzünk egy példát mindhárom strukturális invariancia tulajdonság öröklődésére. Ehhez tekintsük a prioritási szabályt mint egy determinisztikus és mint egy (degenerált) sztochasztikus elosztási eljárást. Ismert, hogy a prioritási szabály (lásd Moulin [2]) teljesíti mindhárom strukturális invariancia tulajdonságot. Továbbá könnyen belátható, hogy a prioritási szabálynak önmaga egy minimális varianciájú elosztási eljárása.

4 Összefoglalás

Hét nevezetes tulajdonság segítségével megvizsgáltuk a [6]-ban bevezetett minimális varianciájú elosztási eljárások tulajdonságait. Egyrészt megállapítottuk, hogy ha egy determinisztikus elosztási eljárás kereslet-monoton, kínálat-monoton, teljesíti az egyenlő elbánás elvét és önduális, akkor a hozzárendelt minimális varianciájú elosztási eljárások is teljesítik ugyanezen tulajdonságokat. Másrészt példákon keresztül megmutattuk, hogy a konzisztencia, alulról előállíthatóság és felülről előállíthatóság általában nem „öröklődik" egy determinisztikus elosztási eljárásról egy hozzátartozó minimális varianciájú elosztási eljárásra.

Irodalom

1. Balinski, M. L., Young, H. P., *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote,* second edition. Brookings Institution Press, Washington, D.C., (2001).
2. Moulin, H., Priority rules and other asymmetric rationing methods, *Econometrica*, 68 (2000) 643–684.
3. Moulin, H., Axiomatic Cost and Surplus-Sharing. In: Arrow, K. J., Sen, A. K., Suzumura, K., (eds.), *Handbook of Social Choice and Welfare, Volume 1.* North-Holland, Amsterdam, (2002) 289–357.
4. Moulin, H., The Proportional Random Allocation Of Indivisible Units, *Social Choice and Welfare*, 19 (2002) 381–413.
5. Moulin, H., Stong, R., Fair Queuing and Other Probabilistic Allocation Methods, *Mathematics of Operations Research*, 27 (2002) 1–30.

[8] Abban az értelemben, hogy ugyanazon típusú nevezetes tulajdonságokat elégítik ki.

6. Tasnádi, A., On Probabilistic Rationing Methods, *Mathematical Social Sciences*, 44 (2002) 211–221.
7. Tasnádi, A., Az arányos elosztási eljárás egy karakterizációja, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 21 (2004) 261–267.
8. Thompson, W., Axiomatic and Game-Theoretic Analyisis of Bancruptcy and Taxation Problems: a Survey, *Mathematical Social Sciences*, 45 (2003) 249–297.
9. Young, H. P., Distributive Justice in Taxation, *Journal of Economic Theory*, 44 (1988) 321–335.
10. Young, H. P., *Equity, in Theory and Practice*. Princeton University Press, Princeton, (1994).

DETERMINISTIC AND PROBABILISTIC RATIONING METHODS

We investigated the minimal variance methods introduced in Tasnádi [6] based on seven popular axioms. We proved that if a deterministic rationing method satisfies demand monotonicity, resource monotonicity, equal treatment of equals and self-duality, than the minimal variance methods associated with the given deterministic rationing method also satisfies demand monotonicity, resource monotonicity, equal treatment of equals and self-duality. Furthermore, we found that the consistency, the lower composition and the upper composition of a deterministic rationing method does not imply the consistency, the lower composition and the upper composition of a minimal variance method associated with the given deterministic rationing method.